

Tóng xīn fāng shèng: infinites cartes d'amor

Jaume Coll Guerrero

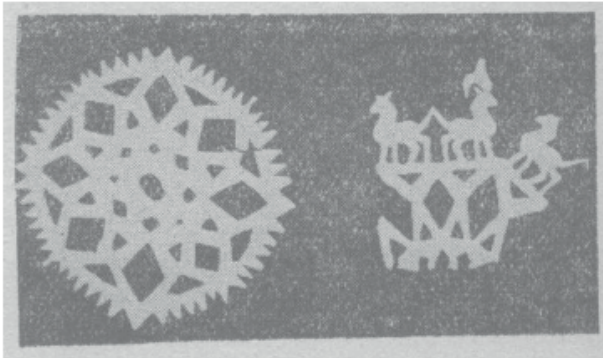
Molins de Rei (Barcelona)

Xiǎoxián Huáng (黄晓娴)

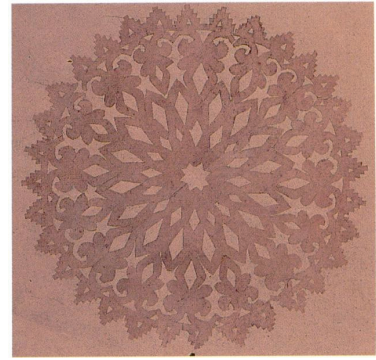
Nanjing (província de Jiangsu)

1. El plegat a la Xina

Tot el que és exòtic ens atrau. Un d'aquests exotismes és la cultura xinesa, que, situada a l'altre extrem del supercontinent eurasiàtic i amb uns cinc mil anys d'història, molt més que qualsevol civilització occidental, va ser durant molts segles una gran desconeguda a causa de la seva llunyania i el seu complex alfabet pictogràfic. Una part d'aquest desconeixement es produeix en la història del paper plegat, una història que encara està per escriure. A Occident és ben conegut i acceptat que el paper va ser inventat a la Xina al voltant de l'any 100 dC per Cai Lun en el període de la dinastia Han de l'Est (21 dC-221 dC). Tot i així, recentment s'ha trobat a Yumen, província de Gansu, un fragment de paper amb caràcters xinesos fet amb fibra de lli que ha estat datat a l'any 8 aC, dins del període de la dinastia Han de l'Oest (202 aC-8 dC). Així doncs, es pot dir que Cai Lun (63 dC-121 dC) va fer una millora significativa en la tecnologia de l'elaboració del paper, que és considerada com una de les quatre grans creacions de l'antiga Xina. Un dels problemes a l'hora d'escriure aquesta història és que no es conserven gaires obres originals perquè el paper és un material molt efímer. Així, les mostres de paper plegat i tallat més antigues que s'han trobat fins ara són del segle VI dC (dinastia Wei de l'Oest). Juntament amb un document que contenia la data 541 dC, van ser descobertes el 1959 a la tomba número 306, al jaciment arqueològic d'Astana, prop de la ciutat de Turpan, situada a l'antiga ruta de la seda, a la regió autònoma uygur de Xinjiang, al nordoest de la Xina. Són dos papers de forma circular plegats i retallats. El primer paper té retallats triangles i motius romboidals repetits amb vuit simetries axials i centrals. Del segon paper només se'n conserva un tros en què apareixen tres motius animals simètrics, molt possiblement cavalls. Les bases de les potes de dos d'aquests motius animals formen un angle de 135 graus, d'on es pot intuir que la peça original tenia forma octogonal amb vuit simetries axials i centrals. Així doncs, les figures representades en aquests dos papers tenen un grup de simetries diedral $D_{2,8}$. A la tomba 303 es van trobar dos fulls de paper semblants amb motius geomètrics i ornamentals amb 16 simetries axials i centrals, un full amb quatre figures humanes retallades perpendicularment amb una inscripció cal·ligràfica i un document amb data del 551 dC.



Astana, tomba 306.



Astana, tomba 303.

Actualment aquests antics papers estan exposats al Museu Provincial de Xinjiang, a la ciutat d'Urumqi. Avui dia a tota la Xina encara es conserva aquesta tradició del paper plegat i tallat.

En aquella època el paper encara no havia arribat a Europa. L'elaboració del seu secret va passar als àrabs de la ciutat de Samarcanda l'any 751; les fonts escrites ens diuen que dos xinesos captius a la batalla de Tulas els van transmetre aquest coneixement. Els àrabs van introduir el paper a Europa pel sud de la península Ibèrica al segle x i ràpidament es va expandir per l'arc mediterrani fins a arribar a la resta d'Europa i posteriorment a Amèrica. Segons el geògraf al-Idrissi, l'any 1150 es produïa un paper de molt bona qualitat a Xàtiva. Les primeres referències de molins paperers a la ciutat de Barcelona són del segle xv. Uns segles més tard es construeixen molts molins paperers a l'interior de Catalunya. Una de les poblacions on es fabricava més paper era Capellades (Anoia), que al segle xviii tenia disset molins paperers; el més important era el molí de la vila, actual Museu Molí Paperer, que data de l'any 1700.

Uns objectes molt sorprenents fets amb paper són els *zhen xian bao*, que podríem traduir per caixes de costurera. Les més comunes són estructures formades per una progressió geomètrica de caixes quadrades i rectangulars de diferents mides disposades en successius nivells; tot i així, també hi ha altres formes molt creatives amb combinacions irregulars. En els diferents nivells s'alternen caixes quadrades amb caixes rectangulars; les caixes d'un nivell inferior tenen el doble d'àrea que les del nivell superior. Aquests conjunts de caixes, normalment força policromades amb diferents motius, s'utilitzaven per desar petites coses com ara fils, agulles o retalls de roba. Els *zhen xian bao* es feien a tota la Xina, però també s'han trobat a altres països asiàtics. Al temple Reikan-ji de Kyoto es conserva una luxosa capsa de fusta amb estris per a la cerimònia de l'encens que pertanyia a l'esposa del shōgun Iemoto Tokugawa. Aquesta capsa, que es va fer abans del 1779, conté deu *zhen xian bao* d'un nivell. Encara avui dia aquest tipus de plegat s'utilitza al Japó en algunes cerimònies de l'encens. Tres moderns *zhen xian bao* del segle xx, possiblement de procedència coreana, un amb tres nivells de caixes i els altres dos amb un únic nivell, pertanyen a la col·lecció del Matsumoto Folk Craft Museum. L'historiador i investigador del plegat Joan Sallas va trobar a França una capsa que contenia un *zhen xian bao* de cinc nivells i una carta escrita en francès i xinès del 1866. Aquest investigador és el propietari i conservador de l'arxiu PaDoRe (Paper-folding Documentation and Research), que conté la col·lecció més important de *zhen xian bao*. Fa uns anys aquesta col·lecció es trobava a la ciutat alemanya de Weimar, però actualment



Zhen xian bao (1866).



Recipient modular (província de Shanxi).

és a Badalona. A la mateixa col·lecció hi ha quatre antics recipients modulars. Alguns d'ells provenen de la província de Shanxi, al nord de la Xina, estan fets amb cartes antigues i tenen probablement més d'un segle d'antiguitat, però és difícil datar-los amb precisió.

Altres formes de paper plegat a la Xina, amb referències literàries des del segle XIV fins als nostres dies, són els *tóng xīn fāng shèng*.

2. *Tóng xīn fāng shèng*

Sovint els anglesos utilitzen com a sinònim de rombe la paraula *diamant*. Aquesta paraula també designa un dels quatre pals del joc del pòquer en les cartes de la baralla francesa. D'altra banda, un quadrat es pot interpretar com un rombe en què els quatre angles tenen 90 graus. *Tóng xīn fāng shèng* és una forma geomètrica formada per dos diamants o dos quadrats parcialment solapats entre si. Des de l'antiguitat aquest patró es troba molt sovint en la vida diària a la Xina, per exemple en ampolles de porcellana, petites safates de jade per netejar pinzells d'escriure, ornaments d'or per a dones, caixes de laca, nusos, patrons en finestres de fusta, etc.



Aquest concepte també es pot trobar escrit com *tóng xīn fāng shèng'r* 同心方胜儿, *fāng shèng* 方胜 o *fāng shèng'r* 方胜儿. Cada caràcter xinès té un significat precís. *Tóng* 同 significa «el mateix»; *xīn*, 心 «cor» o «centre», perquè el cor es pot considerar com el centre del cos. Els caràcters *tóng xīn* 同心 junts es poden entendre com: amb un cor, concèntric, desig comú o aprecia els mateixos ideals i segueix el mateix camí. Aquí, l'ús de 同心 és una expressió amb un significat doble: no tan sols descriu els dos quadrats o diamants solapats que comparteixen

un centre geomètric, sinó que també significa que dues persones comparteixen un mateix cor (opinió, sentiment, emoció, etc.), és a dir, es comprenen l'una a l'altra.

Fāng 方 significa «quadrat», però per als que no són xinesos es pot entendre com una família de paral·lelograms en un sentit més general. En l'idioma xinès, quadrat es diu 正方 *zhèng fāng*, quadrat estàndard; rectangle es diu 长方 *cháng fāng*, quadrat llarg; els diamants (rombes) i altres paral·lelograms es diuen 斜方 *xié fāng*, quadrat inclinat. Així, els quadrats i els diamants es poden anomenar *fāng* en general. *Shèng* 胜 (勝) es pot escriure amb dos caràcters diferents amb el mateix significat. Per als xinesos moderns, 胜 s'utilitza majoritàriament per a victòria, però en aquest context 胜 significa un antic tipus d'ornament per a dones que solien posar-se als cabells. Per exemple, un ornament fet en forma de flor s'anomena 花胜 *huā shèng*, ornament floral; fet en forma de figura humana s'anomena 人胜 *rén shèng*; fet d'or es diu 金胜 *jīn shèng*, ornament daurat; fet amb una bonica tela de seda es diu 彩胜 *cǎi shèng*, ornament de seda de colors; l'ocell puput amb plomes de colors al cap s'anomena 戴胜 *dài shèng*, que porta ornaments, etc. 方胜 *fāngshèng* junt significa ornament quasi quadrat, amb la forma que es descriu més amunt. 同心方胜 *tóngxīnfāngshèng* junt significa dos quadrats o diamants que comparteixen un centre geomètric. Com que els dos quadrats o diamants representen dos amants, també significa un parell d'amants que comparteixen el mateix cor, és a dir, que s'estimen.

方胜 ens indica la forma geomètrica del 同心方胜, així que 同心方胜 és només el nom complet de 方胜; per tant 同心方胜 es pot escriure com 方胜 per abreviar. 儿 (兒) *ér* de vegades apareix al final de 同心方胜 o de la seva expressió abreviada, 方胜. A més de *shèng* 胜 (勝), *ér* 儿 (兒) té també dues maneres diferents d'escriure's amb el mateix significat. 勝, 兒 són les versions tradicionals i més complicades que s'utilitzaven en l'antiguitat, mentre que els caràcters 胜, 儿 són les versions simplificades que s'utilitzen més freqüentment en els nostres dies. 儿 per si mateix vol dir fill o nen, però en aquest context aquest caràcter és utilitzat a les regions del nord de la Xina, com a la capital, Pequín, on els dialectes tenen una manera de parlar amb accent ròtic. Quan 儿 s'utilitza simplement al final d'un nom o un adjectiu, no té un significat especial, simplement es pronuncia i s'escriu com *r*. Per tant, 同心方胜儿 és *tóngxīnfāngshèngr* i 方胜儿 és *fāngshèngr*. Generalment, es pot considerar simplement que aquest hàbit de parlar és del nord de la Xina, és a dir, 同心方胜儿 o bé 方胜儿 s'utilitza més freqüentment al nord i 同心方胜 o bé 方胜 s'utilitza al sud.

3. Cartes d'amor a la literatura xinesa

La forma geomètrica *tóng xīn fāng shèng* 同心方胜 també s'ha utilitzat al llarg dels segles en un disseny tradicional xinès de paper plegat per a una carta d'amor i encara es plega avui dia a la Xina moderna. En els darrers anys diferents autors xinesos han escrit sobre aquest antic model. L'any 2012 l'escriptora 洪颖 Hong Ying va publicar un antic diari personal amb data 10 de juliol de 1994 que té per títol *Plegar la carta lleugerament*, en què es recull una col·lecció de cartes escrites per les seves amistats amb diferents tipus de plec. Una d'aquestes cartes té la forma de *tóng xīn fāng shèng*. Un any més tard, l'escriptora 木子琴缘 Mu Zi Qin Yuan va publicar l'article *Recorda aquella carta plena de pols*, en què descriu que la seva amiga 梅梅 Mei va trobar una carta escrita catorze anys abans en forma de *tóng xīn fāng shèng*, la va desplegar, la va llegir i va aconseguir tornar-la a plegar amb els antics plec. En aquesta carta apareixen els tres caràcters 心连心 *xīn lián xīn*, que significa el cor es connecta amb el cor.



Cartes de Hong Ying.



Tóng xīn fāng shèng de Mei.

El 1981 el lingüista, educador, traductor i poeta xinès 王力 Wang Li (1900-1986) va publicar l'article *Parlant d'escriure una carta amb els joves camarades* en el diari *Daily China Youth*, en què criticava el fenomen que els joves pleguessin les cartes amb la forma de *tóng xīn fāng shèng* amb massa freqüència, fos quina fos la situació: «Al final, per cert, molta gent després d'escriure una carta la plega en forma de *fāng shèng*, crec que no és realment necessari. *Fāng shèng* és un ornament quadrat que les dones portaven a l'antiguitat, fet en seda de colors o altres materials, format per dos rombes (quadrats inclinats) parcialment sobreposats. Aquest era un costum en la societat feudal. Al principi es feia per presentar l'amor. A *El Romanç de la Cambra Occidental* es diu: En poca estona, va plegar el full florit en *tóngxīnfāngshèng* formant un brocat amb els bells caràcters escrits a mà. Després d'obrir el sobre encara necessito temps per desplegar el *Fāng Shèng*, llavors puc començar a llegir la carta. Això és un inconvenient per al receptor. Espero que els vostres homes puguin corregir aquest hàbit».

La investigadora de la història del plegat Xiǎoxián Huáng ha trobat referències d'aquest model de plegat en més de quaranta obres diferents de la literatura xinesa, i en més de seixanta si tenim en compte les diferents versions de cada obra; també ha trobat unes trenta versions on no s'esmenta el plegat *tóng xīn fāng shèng*. La majoria d'aquestes obres no s'han traduït a cap llengua occidental i possiblement cap d'elles al català. Molts documents antics xinesos s'han digitalitzat, es poden cercar a Internet i analitzar introduint diferents combinacions de les paraules clau descrites en l'apartat anterior.

Com que el nom 同心方胜 és un tipus de forma i no només un model de carta de paper, és necessari introduir altres paraules clau per distingir si quan apareix aquesta combinació de caràcters realment es refereix a aquest model de paper plegat. Per sort, 同心方胜 no és un nom comú, així que quan apareix el nom, hi afegim un determinat verb o un material i podem confirmar que aquest document esmentava aquest model. Els mots clau inclouen: verbs relacionats amb el plegat, com *zhé* 折 doblregar, *dié* 叠 superposar-se, *zhé dié* 折叠 plegar; els materials que s'utilitzen per plegar, *zhǐ* 纸 paper, *xìn* 信 carta, *jiān* 笺 paper de notes, *xìn jiān* 信笺 paper de carta, *huā jiān* 花笺 paper de notes florejat; el nom del model 同心方胜 *tóng xīn fāng shèng*, 方胜 *fāng shèng*, i diferents combinacions d'aquestes paraules.

Entre aquestes quaranta referències literàries, la majoria són històries d'amor. Observem que hi ha algunes regularitats: apareixen alguns verbs relacionats amb el desplegat, com ara *chāi* 拆 desplegar-se, *zhǎn* 展 estendre's, *dǎ kāi* 打开 obert; els continguts del model de paper plegat són missatges o poemes, principalment sobre amor, citacions o algun secret;

el model de paper plegat sempre es dona de la persona A de manera indirecta a la persona B, generalment el missatge s'envia a través d'una tercera persona, C, perquè el model es bloqueja molt bé i això és una bona manera de guardar el secret. Sinòlegs del segle XIX van traduir algunes d'aquestes obres literàries; això ens permet veure quin era el coneixement que tenien els no xinesos d'aquest model en aquell temps. Una d'aquestes obres és *IU-KIAO-LI* (~ 1644), traduïda al francès pel sinòleg Jean-Pierre Abel-Rémusat amb el títol *Les deux cousins* el 1826. L'any següent es van fer adaptacions d'aquesta obra a l'anglès i a l'alemany. En aquestes versions, *tóng xīn fāng shèng* es va traduir per *un plegat en quadrat*. D'aquesta mateixa obra existeix una segona traducció al francès del sinòleg Stanislas Julien del 1864. Una segona obra és *Wang Keaou Lwan*, traduïda el 1839 a l'anglès per Robert Thom i a l'alemany el 1846 per Adolf Rottger.

Les obres literàries més antigues trobades per Xiāoxián Huáng en què es fa referència al model de plegat *tóng xīn fāng shèng* són tres obres de teatre de la dinastia Yuan (1271-1368), dues de les quals són del gènere *zaju* i una és del gènere *sanqu*. La més famosa és el *Xi Xiang Ji* o *Història de l'Ala Oest*, del dramaturg Wang Shifu. Aquesta obra ha estat traduïda a diverses llengües europees (alemany, anglès, castellà, francès, italià, portuguès, rus); tot i així, en moltes d'aquestes traduccions no apareix la forma de la carta *fāng shèng* o apareix traduïda com *dos cors units*.



Ruyi's Royal Love in the Palace (capítol 43).

A principis del segle XIX el monjo budista Tooyama Katō (1795-1831) va fer unes anotacions en japonès al text original en xinès del *Xi Xiang Ji*. Al costat de l'expressió xinesa 方胜儿 *fāngshèng'ér* va escriure la paraula japonesa *worikata*, que significa forma de plegar. *Worikata* i *orikata* eren les paraules que fa uns dos-cents anys s'utilitzaven al Japó abans de la paraula *origami* per designar les figures de papiroflèxia.

La majoria de la vintena d'obres de la dinastia Ming (1368-1644) en què s'esmenta el plegat *tóng xīn fāng shèng* són de les províncies situades a la costa oriental: Shandong, Jiangsu i Zhejiang. En aquest període cal destacar quatre històries de l'escriptor Feng Menglong, de Jiangsu (1574-1645); moltes de les seves obres són recopilacions de narracions de dinasties anteriors. Molt traduïda a altres idiomes és l'obra eròtica de la província de Shandong *Flor de*

prunera en gerro daurat, també coneguda amb el nom d'*El lotus daurat* o *Jin Ping Mei*, signada amb el pseudònim de Lanling Xiaoxiao Sheng, que vol dir l'erudit bromista de Langling. La carta *fāng shèng* també apareix en versions posteriors d'aquesta mateixa obra, com ara en la *Tercera continuació del Lotus Daurat*, signada amb el pseudònim Ne Yin Ju Shi, que significa l'eremita que parla rarament. De fet, una quarta part de les obres de les dinasties Ming i Qing estan signades amb pseudònims i algunes per monjos taoistes.

Respecte a la dinastia Qing (1644-1911), també trobem més d'una vintena d'obres on s'esmenta el plegat *tóng xīn fāng shèng*. Els títols d'aquestes obres i els noms dels seus autors no són gaire coneguts a Occident. Una d'aquestes obres és el *Romanç de les dinasties Sui i Tang*, de l'escriptor Chu Renhuo, de la província de Jiangsu. En aquesta obra un dels personatges és l'heroïna Mulan, molt coneguda a Occident per la pel·lícula d'animació de la factoria Disney. Una segona obra molt traduïda és el *Somni a la cambra vermella*, de Cao Xueqin. En aquesta obra no apareix aquest plegat, però sí que apareix en dues de les seves versions escrites posteriorment: en l'obra anònima *Somni de primavera en la cambra vermella* i en *Continuació del somni de la cambra vermella*, publicada el 1821.

Els *tóng xīn fāng shèng* també apareixen en obres literàries dels darrers períodes no dinàstics. En el període de la República Xinesa (1912-1949) l'escriptor Cai Dongfan va recopilar en diversos volums històries de les diferents èpoques dinàstiques. Els *tóng xīn fāng shèng* apareixen en dues de les seves obres: *El romanç popular de la dinastia Song* i *El romanç popular de les dues dinasties Jin*.

Finalment, en l'actual període corresponent a la República Popular de la Xina (des de 1949), aquest plegat s'esmenta en diferents obres. Apareix en el llibre *El cérvol i el calderó*, de Jin Yong, pseudònim de Louis Cha, escriptor, historiador i periodista de la província de Zhejiang amb nacionalitat britànica. Aquesta obra es va publicar en entregues periòdiques entre 1969 i 1972 en un diari de Hong Kong. També apareix en el llibre *El jove Marshal*, de l'escriptora de Xangai en llengua anglesa Eileen Chang. El 2012 la jove escriptora Wu Xuelan va publicar sota el pseudònim Liu Lian Zi l'obra *Els amors reials de Ruyi en el palau*. D'aquest llibre se'n va fer l'any 2018 una sèrie per a la televisió xinesa. En el capítol 43 d'aquesta sèrie es pot veure com es desplega una carta amb plegat *tóng xīn fāng shèng*; en el darrer desplegament la carta es desplega per la meitat, la qual cosa és una variant d'un primer pas que no considerem en els diagrames de la secció 5.

En el diagrama de Xiǎoxián Huáng es relacionen les diferents obres literàries xineses on apareix la carta plegada *tóng xīn fāng shèng* des del segle XIV fins al segle XXI. En les versions anteriors d'aquestes obres de les dinasties Tang (618-907) i Song (960-1279) no s'ha trobat cap obra en què aparegui aquest plegat. En aquest diagrama s'utilitzen les notacions següents: 1 per a l'obra *Xi Xiang Ji* de Wang Shifu (~ 1300); 6 per a *Jin Ping Mei* (~ 1600); 4h, 7a, 8e i 9 per a les obres de Feng Menglong (~ 1600); 11a per l'obra on apareix l'heroïna Mulan (~ 1650); ‡, 25, 26 per les versions del *Somni de la Cambra Vermella* (~ 1800); 1βT per al *Xi Xiang Ji* amb l'anotació japonesa *worikata* (~ 1830); 13αA, 13βA, 13γA, 13δJ per a les versions francesa, anglesa i alemanya de *Les deux cousins* (~ 1830); 8αT, 8βB per a les traduccions a l'anglès i l'alemany de l'obra *Wang Keau Lwan* (~ 1840); 40, 41 per als romanços populars de Cai Dongfan (~ 1920); 42TYM per a l'obra *El jove Marshal* (~ 1960); 43 per a *El cérvol i el calderó* (~ 1970).

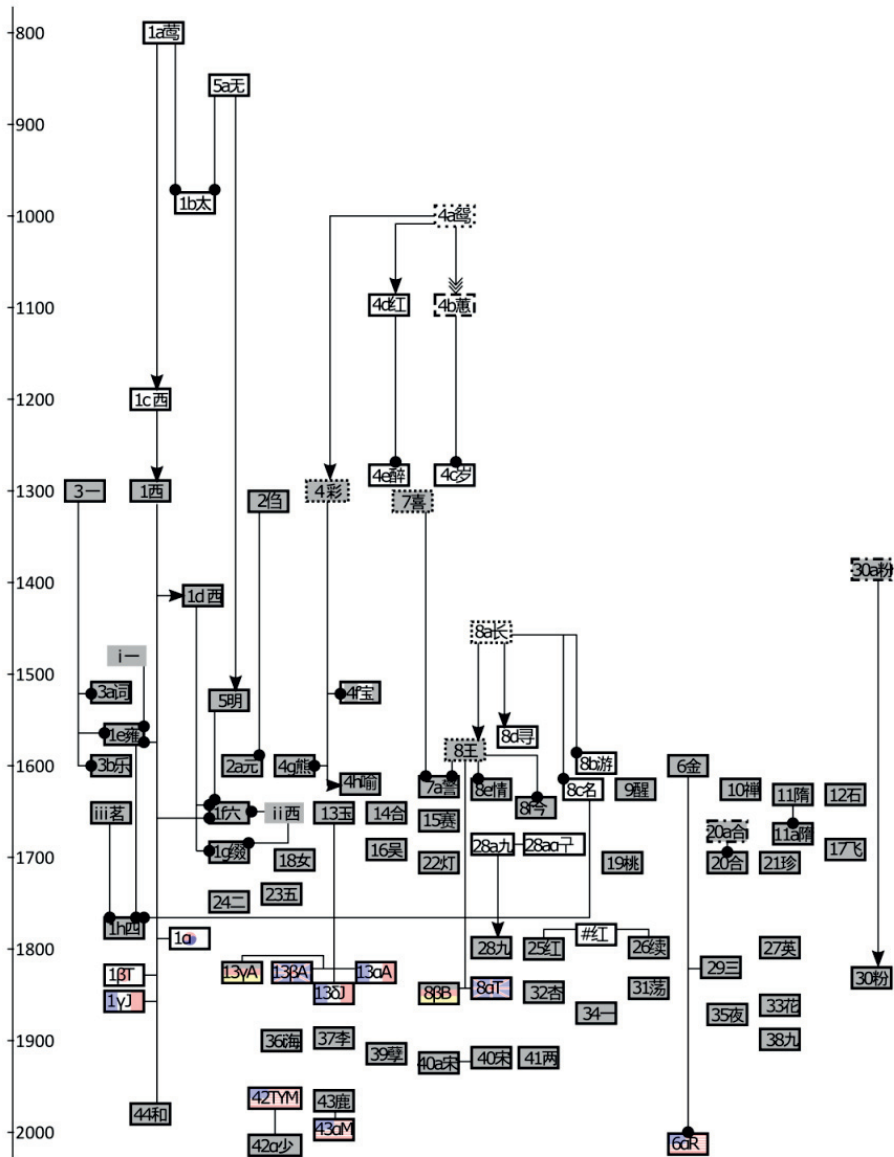


Diagrama de Xiàoxián Huáng.

4. Formats de paper

Avui dia el format de paper més utilitzat és el DIN A4. En el sistema DIN A, acrònim de Deutsches Institut für Normung, es proposa una col·lecció de formats de paper rectangulars DIN A_n . Cada tipus de format s'obté de l'anterior dividint el paper per la meitat, de tal manera que l'alçada i la base del nou format (h_n, b_n) coincideixen respectivament amb la base i la meitat de l'alçada del format anterior.

$$h_n = b_{n-1}, \quad b_n = h_{n-1}/2, \quad \forall n \geq 1 \tag{1}$$

Per definir rigorosament els formats DIN A_n cal imposar dues condicions. La primera condició és que l'àrea A_0 del format inicial DIN A0 és d'un metre quadrat, i per tant, l'àrea A_n del format DIN A_n és una successió de valors decreixents de mesura $1/2^n$ metres quadrats.

$$A_n = h_n b_n = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 0 \quad (2)$$

La segona condició és que cada format és semblant al següent i, per tant, la relació entre l'alçada i la base és constant en cada format.

$$\frac{h_n}{b_n} = \frac{h_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{2b_n}{h_n}, \quad \forall n \geq 1$$

D'aquestes igualtats deduïm que aquesta constant és $\sqrt{2}$ i aplicant el teorema de Pitàgores veiem que la diagonal d'aquests rectangles val $\sqrt{3}b_n$.

$$h_n = \sqrt{2}b_n, \quad \forall n \geq 0 \quad (3)$$

De (2) i (3) obtenim els termes generals dels valors en metres de les bases i les alçades d'aquests rectangles.

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2^n} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2n+1}}} \quad h_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^n} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2n-1}}} \quad \forall n \geq 0,$$

d'on deduïm que les mesures del format DIN A0 són aproximadament 841 mm \times 1189 mm i les dels més habituals 210 mm \times 297 mm per al DIN A4 i 297 mm \times 420 mm per al DIN A3. Observem que els valors exactes pertanyen al cos $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

Una segona manera de fer aquest càlcul és escriure matricialment la recurrència (1).

$$\begin{pmatrix} h_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

El polinomi característic de la matriu val $x^2 - 1/2$, amb valors propis $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ i vectors propis $\vec{v}_1 = (\sqrt{2}, 1)$ i $\vec{v}_2 = (-\sqrt{2}, 1)$, respectivament. Fent un canvi de base es pot diagonalitzar la matriu

$$\begin{pmatrix} h_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

i obtenir les dimensions dels formats DIN A_n en funció de les dimensions del format DIN A0

$$\begin{pmatrix} h_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0$$

Anàlogament, el sistema DIN B es defineix imposant la condició que el format inicial DIN B0 tingui àrea $\sqrt{2}$ i, per tant, dimensions aproximades de 1000 mm × 1414 mm. Per aquest sistema els formats DIN Bn tenen dimensions exactes al cos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$$(b_n, h_n)_B = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}, \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \right), \quad \forall n \geq 0$$

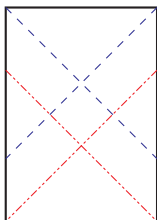
Un tercer tipus de format menys conegut és el sistema DIN C, en què les dimensions dels formats DIN Cn es defineixen com la mitjana geomètrica de les dimensions dels formats dels sistemes anteriors DIN An i DIN Bn.

$$(b_n, h_n)_C = \left(\frac{1}{\sqrt[8]{2^{4n+1}}}, \frac{1}{\sqrt[8]{2^{4n-3}}} \right), \quad \forall n \geq 0$$

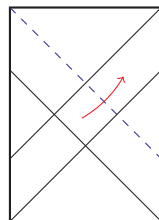
Per aquest sistema les dimensions aproximades del format DIN C0 són 917 mm × 1297 mm i les dimensions exactes dels formats DIN Cn són elements del cos $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2})$.

5. Papiroflèxia de *tóng xīn fāng shèng* generalitzats

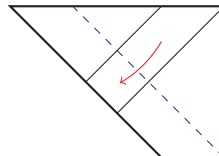
Prenem un full DIN A4. Prèviament (pas 0) pleguem i despleguem en vall per les bisectrius dels dos angles superiors i a continuació pleguem i despleguem en muntanya per les dues bisectrius dels dos angles inferiors. En els passos 1 a 4 pleguem en vall per les bisectrius indicades.



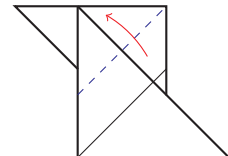
Pas 0



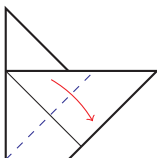
Pas 1



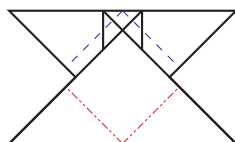
Pas 2



Pas 3



Pas 4



Pas 5

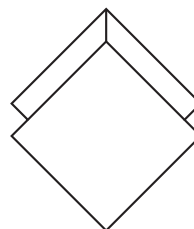
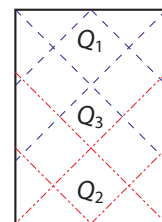


Figura final

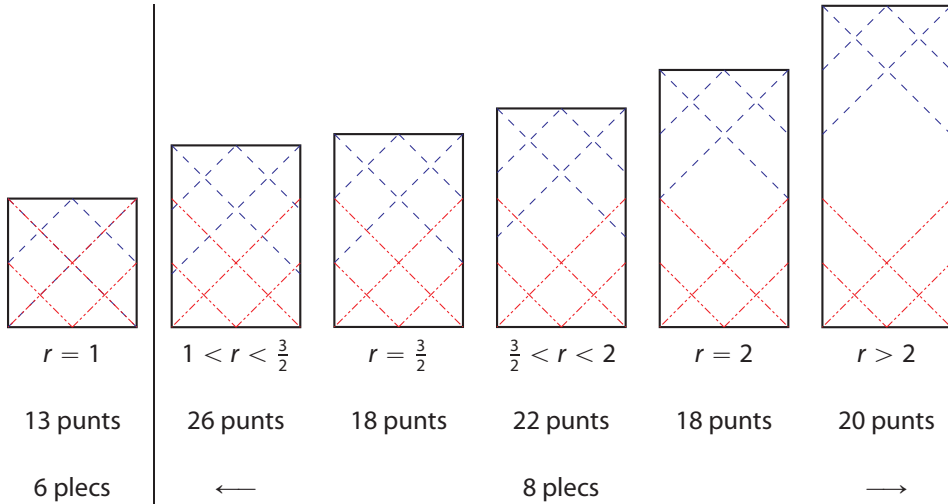


Tots els plecs

Finalment, en el pas 5 plegarem en vall els dos triangles superiors i en muntanya els dos inferiors i amagarem els quatre vèrtexs per obtenir la carta-sobre *tóng xīn fāng shèng*. La figura final és un octàgon còncav format per la unió de dos diamants amb la mateixa àrea (Q_1

i Q_2) que intersequen en un tercer quadrat més petit, Q_3 . Si despleguem la figura i observem tots els plecs, deduïm que les diagonals dels diamants Q_1 i Q_2 mesuren la meitat de la base del full i , per tant, la diagonal del quadrat intersecció Q_3 mesura la diferència entre l'alçada i la base del full inicial.

El procés anterior es pot generalitzar per obtenir altres formes de *fāng shèng* canviant la proporció entre l'alçada i la base del full inicial. Si en lloc d'un full DIN A4 fem tots els plecs en un full qualsevol d'alçada h i base b , prenent $h \geq b$, aleshores les línies rectes per on es fan els plecs tallen en un nombre variable de punts que depèn de la proporció $r = h/b$.



Com hem vist en l'apartat anterior, la diagonal dels diamants no depèn de l'alçada del full

$$d_1 = d_2 = b/2, \quad d_3 = h - b.$$

El darrer valor és mínim si l'alçada coincideix amb la base; en aquest cas, el full inicial és un quadrat $r = 1$ i la figura no es pot tancar. I és màxim si la diagonal del quadrat intersecció coincideix amb la diagonal dels diamants grans, $h - b = b/2$; és a dir, per a $r = 3/2$. Per valors de la proporció r superiors a 1,5 la figura tampoc tanca. Així doncs, els *fāng shèng* es poden realitzar pels infinits valors de l'interval semiobert

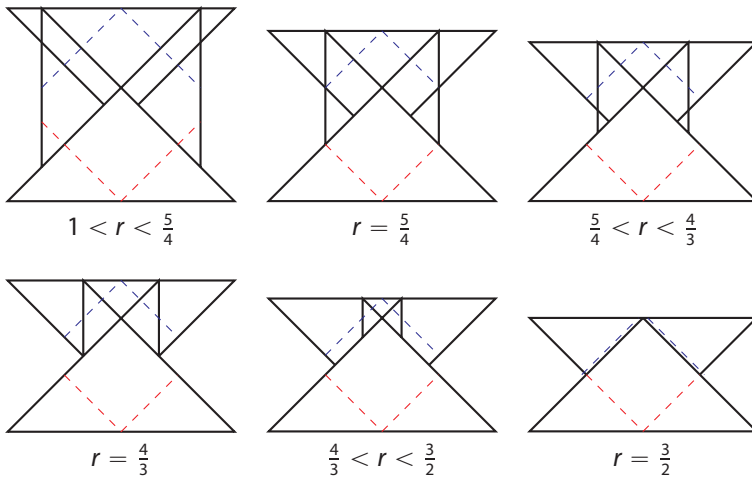
$$r \in (1, 1.5]$$

Totes les rectes per on es fan els plecs tenen pendent $m = \pm 1$ i les seves equacions fixant uns eixos cartesianes amb origen al centre del full rectangular són

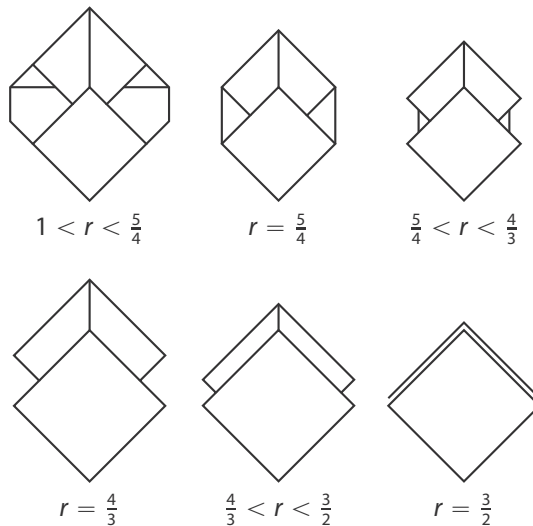
$$y = \pm x \pm \frac{h-b}{2}, \quad y = \pm x \pm \frac{h}{2}$$

Juntament amb les equacions de les rectes que limiten els costats del full $y = \pm h/2, x = \pm b/2$ es poden determinar les coordenades de tots els punts d'intersecció.

En les figures següents del pas 5 observem que els segments verticals s'allunyen del centre quan decreix el valor de $r = h/b$.



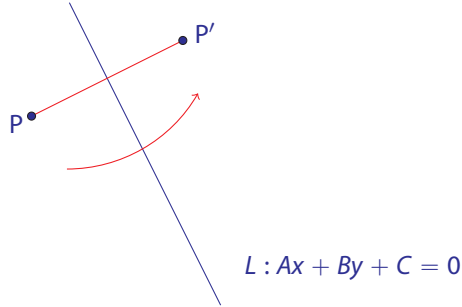
D'aquesta manera es poden diferenciar sis situacions diferents. Per a $r = 3/2$ la figura final és un quadrat format per dos diamants que se sobreposen. A l'interval $4/3 \leq r < 3/2$ s'obté un octàgon còncav; quan disminueix el valor de la proporció en aquest interval, els diamants se separen fins a assolir una separació màxima per a $r = 4/3$. A l'interval $5/4 < r < 4/3$ la figura final és un decàgon còncav format pels dos diamants i dos triangles laterals i per a $r = 5/4$, un hexàgon convex. Finalment, a l'interval obert $1 < r < 5/4$ també s'obté un hexàgon, però amb pentàgons en els laterals.



De la mateixa manera que els formats DIN, els antics papers xinesos on s'escriuven les cartes d'amor amb plegat *tóng xīn fāng shèng* haurien de tenir una proporció $4/3 \leq r \leq 3/2$.

6. Equacions d'un plec

Sense perdre generalitat considerarem que, en lloc de fer plecs en un full finit, fem els plecs en un pla infinit. En fer un plec en un pla per una recta, cada punt P d'un semiplà se sobreposa sobre el seu punt simètric P' respecte a aquesta recta L .



El punt mitjà d'aquests dos punts pertany a la recta i el segment que els uneix $\overline{PP'}$ és perpendicular a la recta:

$$\frac{P + P'}{2} \in L, \quad \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{\nu} = 0,$$

on $\vec{\nu} = k(A, B)$ és un vector perpendicular a la recta L . D'aquesta manera obtenim les coordenades del punt $P' = (x', y')$ en funció de les coordenades del punt $P = (x_0, y_0)$ i els coeficients de l'equació general de la recta $L : Ax + By + C = 0$:

$$(x', y') = (x_0, y_0) - 2 \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} (A, B).$$

Aquestes equacions ens permeten calcular la posició de cada punt quan es fan els plecs successius. Es poden programar en un manipulador algebraic com Mathematica o Maple per trobar les coordenades exactes o aproximacions numèriques implementant-les en C, Python o fins i tot en un full de càlcul com Excel o Calc. Com que es treballa amb un full de dimensions finites, les equacions es poden afinar amb expressions més complexes afegint dominis i paràmetres per controlar les capes. Deixem com a exercici per al lector les afirmacions següents:

1. Àrea dels diamants: $b^2/8$
2. Àrea del quadrat d'intersecció: $(h - b)^2/2$
3. Distància entre els centres dels diamants: $(3b - 2h)/4$
4. Àrea del tóng xīn fāng shèng:

$$A(b, h) = \begin{cases} 2(b - \frac{h}{2})^2 - \frac{1}{2}(h - b)^2 & \text{si } 1 < r \leq \frac{5}{4} \\ \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}(h - b)^2 + \frac{1}{2}(4b - 3h)^2 & \text{si } \frac{5}{4} \leq r \leq \frac{4}{3} \\ \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}(h - b)^2 & \text{si } \frac{4}{3} \leq r \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

5. Perímetre del *tóng xīn fāng shèng*:

$$p(b,h) = \begin{cases} 2\sqrt{2}(3b - 2h) + 2(h - b) & \text{si } 1 < r \leq \frac{5}{4} \\ 4\sqrt{2}(h - b) + 2(4b - 3h) & \text{si } \frac{5}{4} \leq r \leq \frac{4}{3} \\ 2\sqrt{2}(2b - h) & \text{si } \frac{4}{3} \leq r \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

6. Les funcions definides a trossos de dues variables $A(b,h)$ i $p(b,h)$ són contínues en el seu domini de definició, $D = \{(b,h) \in \mathbb{R}^2 \mid b > 0, h > 0, b < h \leq 1.5b\}$.

Referències

- [1] Corrigan, G., Smith, R. (2012). *A Little Known Chinese Folk Art: Zhen Xian Bao*.
- [2] Gayoso Carreira, G. (1994). *Historia del papel en España*, Diputación Provincial de Lugo.
- [3] Huáng, X. (2018). *Tóng xīn fāng shèng*, British Origami Society Convention.
- [4] Huáng, X. (2019). *Chinese love letter*, Mouvement Français des Plieurs de Papier / Colmar.
- [5] Lanling Xiaoxiao Sheng (2010). *El erudito de las carcajadas*, Editorial Atalanta.
- [6] Menglong, F. (2002). *Sanyan: una tria*, Publicacions UAB.
- [7] Pla i Carrera, J. (2009). *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*, Nivola.
- [8] Shifu, W. (2008). *Historia del ala oeste (Tres dramas chinos)*, Gredos.
- [9] Shifu, W. (2008). *El pabellón del ala oeste*, Editorial Ponent Mon.
- [10] Soong, M. (2004). *Papiroflexia china para principiantes*, Jose J. de Olañeta.
- [11] Xueqin, C. (2017). *Sueño en el pabellón rojo*, Galaxia Gutenberg.

Agraïments: a en Joan Sallas per cedir-nos les fotografies de l'arxiu PaDoRe i organitzar les jornades del plegat FALTIK a Friburg de Brisgòvia i APLEC a Badalona, on es va exposar gran part del contingut d'aquest article, i a en Josep Ramis per les correccions de català.



Els autors d'aquest article al Matsumoto Folk Craft Museum.

